

编号:



同濟大學

毕业设计（论文）

---

论文题目: 非正弦信号的无功功率测量

---

院（系）: 电子与信息工程学院

专 业: 电子信息工程

姓 名: 董海峰

学 号: 010476

指导教师: 周治邦

日 期: 2005年6月10日

---

## 摘要

计算周期的非正弦电压、电流波的功率，通常可以将电压和电流信号分解成各次谐波，然后按正弦信号的方法，分别计算各次谐波的无功功率，相加后即得到周期非正弦信号的无功功率。计算正弦信号的无功功率时，可以把电压信号  $u(t)$  作  $-90^\circ$  相移后，用计算有功功率的方法来计算无功功率。通过有功功率和无功功率的关系，可以使无功功率的计算方法变得简单。希尔伯特变换可以将电压信号  $u(t)$  相移  $-90^\circ$ ，这一方法现在已经广泛地应用于实际信号的无功功率测量。在实际的测量中，由于大多采用数字计算，需要将信号离散化。因此，分析计算时应该对  $u(t)$  作离散希尔伯特变换，相应地  $Q$  计算也必须离散化。根据希尔伯特变换和离散功率的计算方法，可以设计出 MATLAB 的实验程序。利用上述程序，验证了该算法可以应用于实际的周期有限谐波信号的无功功率计算。同时，可以分析产生计算误差的主要原因和希尔伯特变换的截断处理对算法精度的影响。

**关键词：**周期的非正弦信号，无功功率，希尔伯特变换，离散化

## Abstract

To compute the power of non-sinusoid periodical voltage and current signals, we often decompose them into harmonics. By computing the reactive power of each sinusoidal harmonic separately and adding them together, we can easily acquire the reactive power of the original periodical non-sinusoid signals. When considering the reactive power of periodical non-sinusoid signals, we can replace the reactive power with active power after we shift the phase of the voltage signal  $u(t)$  by  $-90^\circ$ . In this way, the method of computing reactive power can be simplified. Voltage signal  $u(t)$  can be shifted by  $-90^\circ$  through Hilbert transformation and it is widely used in practice. Because we often choose digital computing in practical measurement, the voltage and current signals must be discretized. Accordingly, the Hilbert transformation of  $u(t)$  and the computing of reactive power  $Q$  must be discretized. MATLAB experiment based on what is stated above can be programmed and the experimental results show that designed algorithm is correct and it can be applied to actual reactive power measurement of non-sinusoid periodical signals. At the same time, we can analyze the main reason of computing error and the influence by section process in Hilbert transformation.

**Key words:** periodical non-sinusoid signal , reactive power , Hilbert transformation , discreteness

## 目 录

摘 要.....	I
ABSTRACT.....	II
目 录.....	III
1 诸 论.....	1
1.1 引 言.....	1
1.2 本文的主要结构和内容提要.....	1
2 正弦信号的无功功率.....	2
2.1 无功功率的定义.....	2
2.2 正弦信号的功率表达式.....	4
2.3 有功功率和无功功率的关系.....	5
3 周期非正弦信号的无功功率.....	7
3.1 周期非正弦信号的概念.....	7
3.2 周期非正弦信号的分解.....	7
3.3 周期非正弦信号的功率.....	8
3.4 希尔伯特变换.....	10
4 无功功率计算的离散化.....	13
4.1 离散的希尔伯特变换.....	13
4.2 离散无功功率的计算.....	14
5 相关的 MATLAB 编程.....	16
5.1 计算希尔伯特变换的子程序 yhilbert.m.....	16
5.2 计算单次谐波无功功率的子程序 calq.m.....	18
5.3 计算多次谐波无功功率的总程序 dhf.m.....	19
6 测量结果分析.....	21
6.1 验证算法可以应用于实际计算.....	21
6.2 精度分析.....	25
7 结论与展望.....	27
谢 辞.....	28
参考文献.....	29

## 1 绪 论

### 1.1 引言

信号的一个主要用途就是传输能量，因此研究其功率具有非常重要的意义。对于普通的正弦电压和电流信号，其有功功率和无功功率的计算方法已经相当成熟，并且在电路原理课程中已经阐述得很详细了。而对于非正弦电压和电流信号的功率，目前还没有论文发表。

非正弦信号功率的测量是复杂的。本课题主要研究一种特殊的非正弦信号，即周期非正弦信号的无功功率测量，以及可以应用于实际测量的算法程序。

### 1.2 本文的主要结构和内容提要

电压和电流都可以表示成正弦形式的信号简称为正弦信号。第2章中主要讨论了正弦信号的功率，同时引出了有功功率和无功功率的概念。实际中使用的电压或电流信号可能不是正弦形式的，在这种情况下，就不能使用正弦信号的方法直接计算功率。非正弦信号的功率测量通常是复杂的，第3章中研究了一种特殊的非正弦信号，即周期的非正弦信号。这种信号电压和电流波有相同的周期 $T$ ，且只带有有限谐波成分。这时，可以利用傅里叶级数的分解方法，把周期的非正弦信号分解为有限次的谐波，然后再分别计算各次谐波的无功功率，相加后即得到原信号的无功功率。这种周期的非正弦信号，在实际的功率测量中是经常遇到的，例如电能计算和数字电路的耗散功率计算等，因此研究其功率的测量方法具有实际意义。而第4章则进一步在离散的时域内讨论周期非正弦信号的无功功率，将无功功率的计算扩展到离散的情况，更加符合实际的测量。

第5章根据给出的算法，使用MATLAB设计实验程序，实际实现无功功率测量的算法。第6章设计了一组已知谐波成分的，周期的非正弦电压和电流波，测量其无功功率，验证实验程序可以应用于实际的无功功率测量中，同时还对测量结果作了精度分析。

该课题在以下限定条件下研究：首先，假设信号采样的间隔时间，可以将周期 $T$ 等分，即不考虑因计算机（例如使用微处理器）字长问题，或信号在测量过程中谐波成分的变化等原因而不能将周期 $T$ 等分的情况。其次，文中不涉及实时的无功功率测量问题，分析使用的是等间隔采样得到的离散信号值。

## 2 正弦信号的无功功率

### 2.1 无功功率的定义

本章主要讨论稳态正弦信号的功率计算问题。正弦波的一个主要用途是传输能量，因此，在正弦稳态分析中，功率是很重要的概念。正弦稳态时的功率是随时间变化的，但通常我们感兴趣的并不是它的瞬时值，而是它的平均值，即电路中消耗功率的平均值。这样，我们就引入了有功功率、无功功率以及视在功率的概念。

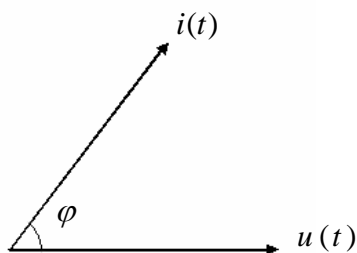


图 2-1 正弦形式的电压和电流相位图

如图 2-1，是电压  $u(t)$  和电流  $i(t)$  的相量表示形式， $\varphi$  为电压信号和电流信号的相位差，它们有相同的周期  $T$ 。设  $U$  为电压  $u(t)$  的有效值， $I$  为电流  $i(t)$  的有效值。我们把电压  $u(t)$  和电流  $i(t)$  的同相分量的乘积称为有功功率，也称为平均功率，记作  $P$ ，单位为瓦特 (watt)。显然有

$$P = UI \cos \varphi$$

同理，利用公式也可以很容易的得出有功功率的表达式。如图 2-2，单口网络  $N$  由电源  $G$  供电，按图中所设电压及电流的参考方向，当瞬时功率  $p = ui$  为正值时，能量系流入  $N$ 。

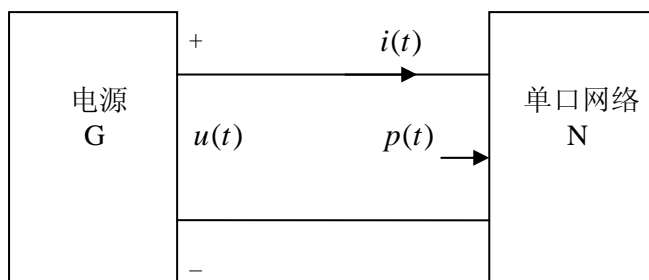


图 2-2 单口网络  $N$  的功率

若端钮上正弦电压和电流分别为

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m \cos(\omega t + \varphi) \\ i(t) &= I_m \cos \omega t \end{aligned} \quad (2-2)$$

则网络  $N$  所吸收的瞬时功率为

$$p(t) = u(t)i(t) = U_m I_m \cos(\omega t + \varphi) \cos \omega t$$

根据三角公式  $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$ ，上式可写为

$$p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m [\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi] \quad (2-3)$$

该式中的前一项为正弦项，角频率为  $2\omega$ ，它在一个循环内的平均值为零。所以，其平均功率显然为  $p(t)$  表示式中的常数项，即  $P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi = UI \cos \varphi$ ，恰好为有功功率。

有功功率表示设备从电源上吸收的功率。当  $\varphi$  为零时，有功功率  $P$  最大，其值为  $UI$ 。此即相当于纯电阻的情况。当  $\varphi$  不为零时，意味着阻抗有电抗分量，因而在每一循环中功率有为负值的部分。当  $\varphi$  大于  $90^\circ$  时，有功功率  $P$  为负值，说明该设备向外提供能量。特殊的，当  $\varphi = \pm 90^\circ$  时，有功功率  $P$  为零，设备不消耗能量。

类似的，我们把电压  $u(t)$  和电流  $i(t)$  的正交分量的乘积称为无功功率，记作  $Q$ ，单位为乏 (var)。显然有

$$Q = UI \sin \varphi \quad (2-4)$$

同样，利用公式也可以很容易的得出无功功率的表达式，在前面的瞬时功率  $p(t)$  的表达式 (2-3) 中，我们只对常数项  $UI \cos \varphi$  进行了分析，而未对式中的第一项，即以角频率  $2\omega$  交变的功率分量作进一步的讨论。利用三角公式  $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ ，可以将该交变分量展开为两项，即

$$UI \cos(2\omega t + \varphi) = UI \cos \varphi \cos 2\omega t - UI \sin \varphi \sin 2\omega t$$

于是，瞬时功率  $p(t)$  可写作

$$p(t) = UI \cos \varphi (1 + \cos 2\omega t) - UI \sin \varphi \sin 2\omega t \quad (2-5)$$

其中，第一个分量为非负的，其平均值为  $UI \cos \varphi$ ，这一分量显然是电阻所消耗的有功功率。第二个分量则以角频率  $2\omega$  在横轴上下波动，其平均值为零，振幅为  $UI \sin \varphi$ ，这一分量表明电源与阻抗间存在着能量往返的情况，也就是无功功率。

无功功率表示电源与阻抗的电抗分量间存在着能量往返的情况，无功功率的大小反映的电源参与贮能交换的程度。因为有部分能量往返于电源和设备之间，所以在实际应用中，我们可以在电感性负载中增添电容元件，或者在电容性负载中增添电感元件，以减少电源给予负载的无功功率。

在电工技术中，把  $UI$  或  $\frac{1}{2} U_m I_m$  称为视在功率，记作  $S$ ，单位为伏安 (V·A)，有

$$S = \frac{1}{2} U_m I_m = UI \quad (2-6)$$

很容易得出，视在功率与有功功率、无功功率存在着以下的关系

$$(2-7)$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

因此，正弦交流电路中，有功功率  $P$  一般不等于  $UI$ ，只有在纯电阻的情况下才相等。有功功率一般是小于视在功率的，也就是说要在视在功率上打一个折扣才能等于有功功率。这个折扣就是  $\cos \varphi$ ，称为功率因数，用符号  $\lambda$  表示，即

$$\lambda = \frac{P}{S} = \cos \varphi \quad (2-8)$$

视在功率可以反映设备的容量。以发电机为例，发电机是按照一定的额定电压和额定电流值来设计和使用的，在使用时，如果电压、电流超过额定值，发电机就可能遭到损坏。因此，电气设备都是用额定视在功率来表示它的容量的，至于一个发电机对负载能提供多大的平均功率，则还要看负载的  $\lambda$  是多大而定。

由公式 (2-7) 可知，如果已知信号的有功功率，就可以计算出信号的无功功率。同理，如果已知信号的无功功率，就可以计算出信号的有功功率。因此，在第 3 章中我们仅分析信号无功功率的测量方法。

## 2.2 正弦信号的功率表达式

我们先来考虑只有一个谐波成分的特殊情况。当电压和电流的波形都是按正弦规律变化的，则该信号为正弦信号。例如市用的 220V 交流电信号。对于理想的正弦信号，我们可以利用一般的三角变换的方法来计算其无功功率。

假设正弦电压和电流信号的瞬时值可以分别表示为

$$\begin{aligned} u(t) &= a \sin(\omega t + \varphi) \\ i(t) &= b \sin(\omega t + \theta) \end{aligned} \quad (2-9)$$

其中， $a$  和  $b$  分别为电压和电流的峰值， $\varphi$  和  $\theta$  分别为电压和电流的初相角， $\omega$  为角频率。此时，信号的瞬时功率为

$$p(t) = u(t)i(t) = ab \sin(\omega t + \varphi) \sin(\omega t + \theta)$$

再利用三角变换公式  $\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$ ，可得

$$p(t) = \frac{1}{2} ab [\cos(\varphi - \theta) - \cos(2\omega t + \varphi + \theta)] \quad (2-10)$$

该式中的第二项为正弦项，角频率为  $2\omega$ ，它在一个循环内的平均值为零。所以，其平均功率显然为  $p(t)$  表示式中的常数项，即  $\frac{1}{2} ab \cos(\varphi - \theta)$ 。

所以，正弦信号的有功功率为

$$P = \frac{1}{2} ab \cos(\varphi - \theta) \quad (2-11)$$

对公式 (2-10) 中的第二项正弦项，利用三角变换公式进行分解，由公式  $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ ，可得



$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} ab \cos(2\omega t + \varphi + \theta) \\ &= \frac{1}{2} ab \cos 2(\omega t + \theta) \cos(\varphi - \theta) - \frac{1}{2} ab \sin 2(\omega t + \theta) \sin(\varphi - \theta) \end{aligned}$$

于是，瞬时功率  $p(t)$  可写作

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{2} ab \cos(\varphi - \theta) [1 - \cos 2(\omega t + \theta)] \\ &\quad + \frac{1}{2} ab \sin(\varphi - \theta) \sin 2(\omega t + \theta) \end{aligned} \quad (2-12)$$

由表达式 (2-12) 可知，瞬时功率  $p(t)$  的第一个分量为非负的，其平均值为  $\frac{1}{2} ab \cos(\varphi - \theta)$ ，这一分量显然是电阻所消耗的有功功率。第二个分量则以角频率  $2\omega$  在横轴上下波动，其平均值为零，振幅为  $\frac{1}{2} ab \sin(\varphi - \theta)$ 。

所以，信号的无功功率为

$$Q = \frac{1}{2} ab \sin(\varphi - \theta) \quad (2-13)$$

这样，就可以计算出电压和电流信号为正弦形式时的无功功率，也就是只有一次谐波成分的电压和电流信号的无功功率。

我们知道，有功功率和无功功率分别反映设备从电源上吸收的能量和往返于电源与设备之间的能量。那么，它们之间存在什么关系呢？无功功率的计算能否转化成有功功率的计算呢？

### 2.3 有功功率和无功功率的关系

我们观察有功功率的计算公式 (2-11) 和无功功率的计算公式 (2-13) 发现，它们分别为  $\frac{1}{2} ab$  的余弦分量和正弦分量。由三角公式  $\cos(x - 90^\circ) = \sin x$  可知，只要将信号相移  $-90^\circ$ ，计算出的有功功率就是原信号的无功功率。下面给出证明：

①首先，将电压信号  $u(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$  作  $-\frac{\pi}{2}$  相移，信号的初相角由原来的  $\varphi$  变为  $\varphi - \frac{\pi}{2}$ ，

即把原来的电压信号  $u(t)$  变为滞后  $\frac{\pi}{2}$  的电压信号：

$$u'(t) = a \sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}) \quad (2-14)$$

②把电压信号  $u'(t)$  和电流信号  $i(t)$  的参数分别代入 2.2 节的公式 (2-11) 中，可以计算出信号的有功功率：

$$P' = \frac{1}{2} ab \cos(\varphi - \frac{\pi}{2} - \theta) \quad (2-15)$$

③由三角公式可知,  $\frac{1}{2} ab \cos(\varphi - \frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{1}{2} ab \sin(\varphi - \theta)$ , 而  $\frac{1}{2} ab \sin(\varphi - \theta)$  恰好就是原电压信号  $u(t)$  和电流信号  $i(t)$  的无功功率, 即有

$$P' = Q \quad (2-16)$$

所以, 得到了无功功率的另一种计算方法: 即计算正弦信号的无功功率时, 可以把  $u(t)$  作  $-\frac{\pi}{2}$  相移后, 来计算有功功率, 得到有功功率也就是原信号的无功功率。这种计算方法, 在后面的多次谐波的功率计算中仍然适用。

## 3 周期非正弦信号的无功功率

### 3.1 周期非正弦信号的概念

如果时变电压和电流的每个瞬时值在经过相等的时间后重复出现, 则这种电压和电流便是周期性的, 称为周期电压和电流。周期电压或电流应该满足:

$$u(t) = u(t + kT)$$

$$i(t) = i(t + kT)$$

其中,  $k$  为任意正整数。这就是说, 在时刻  $t$  和时刻  $t + kT$  的瞬时值是相等的, 对于所有的  $t$  都是如此。 $T$  称为周期, 是波形函数再次重复出现所需的最短时间间隔。

在上一章中, 我们讨论了正弦信号的无功功率。然而, 实际的电压或电流信号可能不是正弦形式的。比如, 220V 的交流电在传输过程中可能受到干扰, 使信号的波形产生畸变。在这种情况下, 就不能使用正弦信号的方法直接计算无功功率。

非正弦信号的功率测量是复杂的, 这里只研究一种特殊的非正弦信号, 即电压和电流波有相同的周期  $T$  的非正弦信号。这种信号可以分解为各次谐波成分 (在 3.2 节中介绍), 周期非正弦信号在实际的功率测量中是经常遇到的, 例如脉冲信号、方波信号、三角波信号等。因此研究其功率的测量方法具有实际的意义。

### 3.2 周期非正弦信号的分解

1882 年, 法国工程师傅里叶指出, 一个任意的周期函数  $x(t)$  都可以分解为无穷多个不同频率正弦信号的和, 也就是傅里叶级数。所以, 周期的非正弦信号可以分解成各次谐波信号的和的形式。

对周期的非正弦信号的分解, 相当于一束太阳光通过一个玻璃三棱镜后可以分解成不同颜色的光。傅里叶分析方法相当于光谱分析中的三棱镜, 而信号  $x(t)$  相当于一束白光, 将  $x(t)$  通过傅里叶分析后可得到信号各次谐波, 各次谐波作傅里叶反变换后又可得到原信号  $x(t)$ 。

按照傅里叶级数的定义, 周期函数  $x(t)$  可由三角函数的线性组合来表示。若  $x(t)$  的周期为

$T_1$ , 角频率为  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ , 频率为  $f_1 = \frac{1}{T_1}$ , 则傅里叶级数展开表达式为

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + a_1 \cos(\omega_1 t) + b_1 \sin(\omega_1 t) + a_2 \cos(2\omega_1 t) \\ &\quad + b_2 \sin(2\omega_1 t) + \cdots + a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t) + \cdots \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)] \end{aligned} \quad (3-1)$$

式中  $n$  为正整数, 各次谐波成分的幅度值按以下各式计算:

直流分量:

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} x(t) dt$$

余弦分量的幅度:

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} x(t) \cos(n\omega t) dt$$

正弦分量的幅度:

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} x(t) \sin(n\omega t) dt$$

若 (3-1) 式中同频率项加以合并, 就可以写成另一种形式:

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \quad (3-2)$$

其中,  $c_0 = a_0$ ,  $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ,  $\tan \varphi_n = \frac{a_n}{b_n}$ 。

式 (3-2) 表明, 任何周期信号都可以分解成直流分量和许多正弦、余弦分量, 这些正弦、余弦分量的频率必定是基频  $f_1$  的整数倍。通常把频率为  $f_1$  的分量称为基波, 其后依次称为二次谐波、三次谐波等等。显然, 直流分量的大小以及基波与各次谐波的幅度、相位取决于周期信号的波形。

根据前面的傅里叶分析方法, 周期的非正弦信号可以表示为基波与各次谐波和的形式。由于本课题研究的是只带有有限次谐波成分的周期的非正弦信号, 所以电压和电流可以分解为如下的傅里叶级数

$$\begin{aligned} u(t) &= a_0 + \sum_{i=1}^N a_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \\ i(t) &= b_0 + \sum_{i=1}^N b_i \sin(\omega_i t + \theta_i) \end{aligned} \quad (3-3)$$

式中  $\omega_i > 0$  是第  $i$  次谐波的角频率, 且  $\omega_i = i\omega_0$  ( $\omega_0$  是基波的角频率),  $\varphi_i$  和  $\theta_i$  分别为电压和电流第  $i$  次谐波的初相角。

然后, 再按照正弦信号功率的计算方法, 分别计算各次谐波的无功功率, 相加后即得到周期非正弦信号的无功功率。需要指出的是, 有关非正弦波的无功功率有许多定义, 上述谐波分解计算功率的方法, 只是依据了普遍采用的无功功率的一种定义。

### 3.3 周期非正弦信号的功率

使用谐波分解的方法计算信号功率, 从形式上看, 似乎没有困难, 但实际上并不适合实际测量, 因为计算的工作量太大。

对于周期的非正弦信号, 将电压的各次谐波都相移, 然后利用下式计算无功功率:

$$Q = \frac{1}{T} \int_0^T u'(t) i(t) dt \quad (3-4)$$

上式中的  $u'(t)$  是相移  $-90^\circ$  后的电压信号,  $T$  是信号的周期。这样计算无功功率就变得相当简单, 只要把电压信号  $u(t)$  的各次谐波都相移  $-90^\circ$ , 然后再作一次积分就可以了。而将电压信

号的各次谐波都相移 $-90^\circ$ 是很方便的,我们会在3.4节的希尔伯特变换中讨论。这一方法,现在已经广泛地应用于实际信号的无功功率测量。

下面,我们来推导无功功率的这一积分表达式。根据三角变换公式  $\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$ , 有

$$\begin{aligned} u'(t)i(t) &= a \sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}) b \sin(\omega t + \theta) \\ &= \frac{ab}{2} \left[ \cos(\varphi - \theta - \frac{\pi}{2}) - \cos(2\omega t + \varphi + \theta - \frac{\pi}{2}) \right] \end{aligned}$$

对  $u'(t)i(t)$  在  $T$  内积分再除以  $T$ , 就得到周期信号的平均功率, 即有功功率

$$\frac{1}{T} \int_0^T u'(t)i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{ab}{2} \left[ \cos(\varphi - \theta - \frac{\pi}{2}) - \cos(2\omega t + \varphi + \theta - \frac{\pi}{2}) \right] dt$$

①

②

积分中的①项是常数项, 积分前后不发生变化; ②项是正弦项, 角频率为  $2\omega$ , 在整个周期内的平均值为零。所以,

$$\frac{1}{T} \int_0^T u'(t)i(t) dt = \frac{ab}{2} \cos(\varphi - \theta - \frac{\pi}{2})$$

也就是原信号的无功功率值, 从而我们可以得到下面的等式:

$$Q = \frac{1}{T} \int_0^T u'(t)i(t) dt$$

公式(3-4)的含义是电压相移 $-90^\circ$ 后与电流相乘, 在一个周期内的平均值即为信号的无功功率。公式(3-4)在以后的功率测量中非常重要, 它也进一步验证了正弦信号的无功功率等于把  $u(t)$  作 $-\frac{\pi}{2}$ 相移后的有功功率。

下面我们来分析周期非正弦信号无功功率的计算方法。首先, 将电压信号  $u(t)$  相移 $-\frac{\pi}{2}$ 得到:

$$u'(t) = \sum_{i=1}^N a_i \sin(\omega_i t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}) \quad (3-5)$$

则 
$$u'(t)i(t) = b_0 \sum_{i=1}^N a_i \sin(\omega_i t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}) \quad \text{①}$$

$$+ \sum_{i=1}^N a_i b_i \sin(\omega_i t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}) \sin(\omega_i t + \theta_i) \quad \text{②}$$

$$+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N a_i b_j \sin(\omega_i t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}) \sin(\omega_j t + \theta_j) \quad \text{③}$$

由于①, ③项积分

$$\frac{1}{T} \int_0^T b_0 \sum_{i=1}^N a_i \sin(\omega_i t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}) dt = 0$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N a_i b_j \sin(\omega_i t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}) \sin(\omega_j t + \theta_j) dt = 0$$

所以，信号的无功功率仅由②项决定，有

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^N a_i b_i \sin(\omega_i t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}) \sin(\omega_i t + \theta_i) dt \\ &= \sum_{i=0}^N \frac{1}{T} \int_0^T a_i \sin(\omega_i t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}) b_i \sin(\omega_i t + \theta_i) dt \end{aligned}$$

即 
$$Q = \frac{1}{T} \int_0^T u'(t) i(t) dt \quad (3-6)$$

(3-6) 式可以用来计算周期非正弦信号的无功功率。这样计算无功功率就变的相当简单，只要把电压信号  $u(t)$  的各次谐波都相移  $-90^\circ$ ，然后再作一次积分就可以了。下面，我们讨论将信号  $u(t)$  相移  $-90^\circ$  的方法。

### 3. 4. 1 希尔伯特变换的定义和性质

给定一连续的时间信号  $x(t)$ ，其希尔伯特变换  $\hat{x}(t)$  定义为

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= x(t) * \frac{1}{\pi t} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t-\tau)}{\tau} d\tau \end{aligned} \quad (3-7)$$

$\hat{x}(t)$  可以看作是  $x(t)$  通过一滤波器的输出，该滤波器的单位冲激响应  $h(t) = 1/\pi t$ ，如图 4-1 所示。

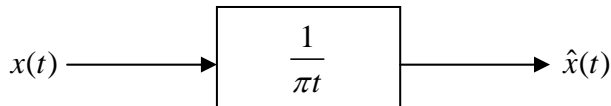


图 4-1 希尔伯特变换器

由傅里叶变换的理论可知， $j h(t) = j/\pi t$  的傅里叶变换是符号函数  $\text{sgn}(\Omega)$ ，因此希尔伯特变换器的频率响应

$$H(j\Omega) = -j \text{sgn}(\Omega) = \begin{cases} -j, & \Omega > 0 \\ j, & \Omega < 0 \end{cases} \quad (3-8)$$

若记  $H(j\Omega) = |H(j\Omega)| e^{j\varphi(\Omega)}$ ，那么

$$|H(j\Omega)| = 1$$

$$\varphi(\Omega) = \begin{cases} -\pi/2, & \Omega > 0 \\ \pi/2, & \Omega < 0 \end{cases} \quad (3-9)$$

这就是说，希尔伯特变换器相当于幅频特性为 1 的全通滤波器，信号  $x(t)$  通过希尔伯特变换器后，其负频率成分作  $+90^\circ$  相移，而正频率成分作  $-90^\circ$  相移。希尔伯特变换器的幅频、相频特性如图 4-2 所示。

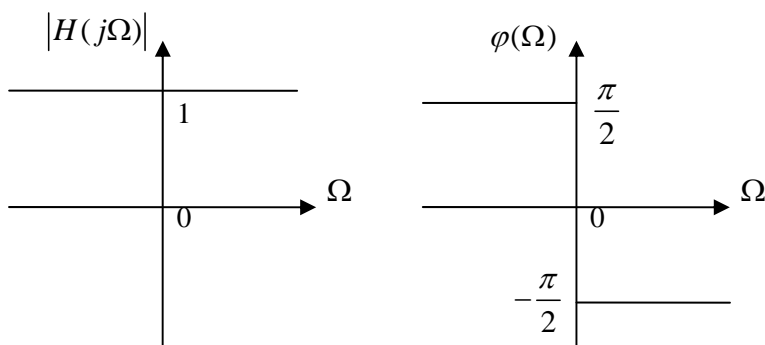


图 4-2 希尔伯特变换器的频率响应

设  $\hat{x}(t)$  是  $x(t)$  希尔伯特变换，定义信号  $x(t)$  的解析信号：

$$z(t) = x(t) + j\hat{x}(t) \quad (3-10)$$

对 (3-10) 两边做傅里叶变换得

$$Z(j\Omega) = X(j\Omega) + j\hat{X}(j\Omega) = X(j\Omega) + jH(j\Omega)X(j\Omega)$$

把 (3-8) 式代入，有

$$Z(j\Omega) = \begin{cases} 2X(j\Omega), & \Omega > 0 \\ 0, & \Omega < 0 \end{cases} \quad (3-11)$$

这样，由希尔伯特变换构成的解析信号只含有正频率成分，且是原信号正频率分量的 2 倍。现在，证明两条希尔伯特变换的性质，这些性质在以后的推导中会用到：

$$H[A \cos \omega_0 t] = A \sin \omega_0 t \quad (3-12)$$

$$H[A \sin \omega_0 t] = -A \cos \omega_0 t \quad (3-13)$$

以 (3-12) 为例，令  $x(t) = A \cos \omega_0 t$ ，因为  $x(t)$  的傅里叶变换为

$$X(j\Omega) = \pi A [\delta(\Omega + \Omega_0) + \delta(\Omega - \Omega_0)]$$

所以，

$$\begin{aligned} \hat{X}(j\Omega) &= \pi A [j\delta(\Omega + \Omega_0) - j\delta(\Omega - \Omega_0)] \\ &= j\pi A [\delta(\Omega + \Omega_0) - \delta(\Omega - \Omega_0)] \end{aligned}$$

显然， $\hat{X}(j\Omega)$  对应的是正弦信号，即余弦信号  $x(t)$  的希尔伯特变换  $\hat{x}(t) = A \sin \omega_0 t$ 。同样可以证明，若  $x(t) = A \sin \omega_0 t$ ，其希尔伯特变换  $\hat{x}(t) = -A \cos \omega_0 t$ 。

## 3. 4. 2 用希尔伯特变换相移电压

为了由  $u(t)$  求出  $u'(t)$ ，即把电压信号  $u(t)$  相移  $-\frac{\pi}{2}$ ，可以使用希尔伯特变换。电压

$u(t) = a_0 + \sum_{i=1}^N a_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$  可以分为两部分：常数项  $a_0$  和正弦项和正弦项  $a_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$ 。

①由希尔伯特变换的定义可知，常数的希尔伯特变换为零；

②由希尔伯特变换性质 (3-13) 可知， $a_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$  的希尔伯特变换为  $-a_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$ ，

也即  $a_i \sin(\omega_i t + \varphi_i - \frac{\pi}{2})$ 。

综上所述， $u(t)$  的希尔伯特变换：

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) &= u(t) * \frac{1}{\pi t} \\ &= \sum_{i=1}^N a_i \sin(\omega_i t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad (3-14)$$

所以，信号的无功功率：

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{T} \int_0^T u'(t) i(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \hat{u}(t) i(t) dt \end{aligned} \quad (3-15)$$

由此可见，完全可以通过希尔伯特变换可将电压信号  $u(t)$  的各次谐波相移  $-\frac{\pi}{2}$ 。



## 4 无功功率计算的离散化

### 4.1 离散的希尔伯特变换

在实际的测量中，由于大多采用数字计算，所以需要将信号离散化。离散信号是在离散的时间上定义的信号，因而独立变量取离散值，即把离散信号表示成数字序列。将连续信号变为离散信号，需要连续信号进行抽样。有

$$x(nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT_s) \quad (4-1)$$

我们先讨论离散时间信号的希尔伯特变换。设离散时间信号  $x(n)$  的希尔伯特变换是  $\hat{x}(n)$ ，希尔伯特变换的单位抽样响应为  $h(n)$ ，由连续信号希尔伯特变换的性质及  $H(j\Omega)$  和  $H(e^{j\omega})$  的关系。我们不难得到：

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & 0 < \omega < \pi \\ j, & -\pi < \omega < 0 \end{cases}$$

因此，

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 j e^{j\omega n} d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} j e^{j\omega n} d\omega$$

求解上式的积分，可得

$$h(n) = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} = \begin{cases} 0, & n = 2m \\ \frac{2}{n\pi}, & n = 2m + 1 \end{cases}$$

其中， $m$  为整数。所以有  $x(n)$  的希尔伯特变换

$$\hat{x}(n) = x(n) * h(n) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{x(n - 2m - 1)}{2m + 1} \quad (4-2)$$

需要指出的是，在对  $x(n)$  作希尔伯特变换时， $m$  不可能取到  $\infty$ 。所以，要把  $x(n)$  在时间轴上进行截断，把  $m$  定义为截断长度，于是就产生了截断误差。取的  $m$  越大，截断误差越小；取的  $m$  越小，截断误差越大（这个问题会在第 6 章中详细说明）。

除了公式 (4-2) 中提到的用单位抽样信号卷积的方法来计算  $u(n)$  离散的希尔伯特变换，也可以用离散傅里叶变换 (DFT) 对  $u(n)$  的解析信号序列作变换来求出  $\hat{u}(n)$ 。

DFT 的定义如下：

$$\begin{cases} X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-j \frac{2\pi}{N} nk) \\ x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \exp(j \frac{2\pi}{N} nk) \end{cases} \quad (4-3)$$

进行离散傅里叶变换对信号的要求是，在时域和频域都应是离散的，且都应是有限长。但

$u(n)$  和  $U(k)$  都是无限长。由于  $\exp(\pm j \frac{2\pi}{N} nk)$  相对  $n$  和  $k$  都是以  $N$  为周期的，所以只要保证  $u(n)$  是以  $N$  点为周期的，那么  $U(k)$  也是以  $N$  点为周期的。所以，在离散傅里叶变换对中  $x(n)$  和  $X(k)$  分别取  $u(n)$  和  $U(k)$  的一个周期。即

$$x(n) = \begin{cases} u(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其它}n \end{cases} \quad (4-4)$$

$$u(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN)$$

这就等价于用矩形窗将  $u(n)$  截取  $N$  点，然后把这  $N$  点视为周期序列  $u(n)$  的一个周期。也就是说， $u(n)$  是由  $x(n)$  作周期延拓所形成的。

不难发现，求出一点  $X(k)$ ，需要  $N$  次复数乘法；求出  $N$  点  $X(k)$ ，需要  $N^2$  次复数乘法。当  $N$  很大时，其计算量是相当大的。利用快速傅里叶变换（FFT）算法，可以使  $N$  点 DFT 的计算量下降为  $\frac{N}{2} \log_2 N$  次，该算法会在第 5 章编程中用到。

利用离散傅里叶变换求  $u(n)$  的希尔伯特变换，算法如下：

①求  $x(n)$  的 DFT  $X(k)$ ， $k = 0, 1, \dots, N-1$ ，其中  $k = \frac{N}{2}, \dots, N-1$  对应负数频率。

$$\textcircled{2} \text{ 令 } Z(k) = \begin{cases} X(k), & k = 0 \\ 2X(k), & k = 1, 2, \dots, N/2-1 \\ 0, & k = N/2, \dots, N-1 \end{cases}$$

③对  $Z(k)$  作逆 DFT，即得到  $x(n)$  的解析信号  $z(n)$ 。

④由  $Z(k) = X(k) + j\hat{X}(k)$  得  $\hat{x}(n) = -j[z(n) - x(n)]$ 。

因为用公式 (4-2) 去编程并不容易，而且与 DFT 算法相比，它的精度不是很高。所以，在课题的设计算法中，以及在后面用 MATLAB 编程计算函数的希尔伯特变换的时候，主要应用 DFT 算法来实现。

## 4.2 离散无功功率的计算

由上节中离散时间信号的希尔伯特变换公式 (4-2) 可知，离散的电压信号经过  $-90^\circ$  相移后，可写作：

$$\hat{u}(n) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{u(n-2m-1)}{2m+1} \quad (4-5)$$

所以，电压信号和电流信号的第  $i$  次谐波分量分别为

$$\hat{u}_i(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{a_i \sin(\omega_i n \Delta t - 2\omega_i m \Delta t - \omega_i \Delta t + \varphi_i)}{2m+1} \quad (4-6)$$

$$i_i(n) = b_i \sin(\omega n \Delta t + \theta_i)$$

将电压信号第  $i$  次谐波  $\hat{u}_i(n)$  与电流信号第  $i$  次谐波  $i_i(n)$  在一个周期内装入并且相乘, 就可以得到第  $i$  次谐波的无功功率。然后, 再把各次谐波的无功功率相加, 便得到了离散化的无功功率:

$$Q = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N \hat{u}_i(n) i_i(n) \Delta t \quad (4-7)$$

由于离散计算时, 选取的截断长度和采样频率不同, 所以用离散化计算出来的无功功率与理论上的无功功率存在一定的差距。我们会在下一章中讨论精度的问题。

## 5 相关的 MATLAB 编程

### 5.1 计算希尔伯特变换的子程序 yhilbert.m

为计算无功功率, 应计算  $\hat{u}(n)$ , 然后作积分:

$$Q = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N \hat{u}_i(n) i_i(n) \Delta t \quad (5-1)$$

为此应该首先计算出离散电压信号  $u(n)$  的希尔伯特变换信号  $\hat{u}(n)$ , 基于上述利用 DFT 求解一个程序的解析信号及希尔伯特变换的理论, 利用 MATLAB 语言编写出了扩展函数 yhilbert.m, 其程序如下:

```
function hxn=yhilbert(xn)
%this program is used to compute hilbert
%zn is analytic sequence of x(n)
%hxn is hilbert transform of x(n)
N=length(xn);
Xk=fft(xn);
k1=0;
Zk(k1+1)=Xk(k1+1);
k2=1:N/2-1;
Zk(k2+1)=2*Xk(k2+1);
k3=N/2:N-1;
Zk(k3+1)=zeros(size(k3));
zn=ifft(Zk);
hxn=-j*(zn-xn);
```

需要指出的是, 在 yhilbert.m 中, 是用 FFT 算法来实现 DFT 的, 其函数如下:

```
Xf=fft(Xt, N, DIM)
```

其中 fft() 函数的功能是计算  $N$  点  $X_t$  序列的  $N$  点离散傅立叶变换  $X_f$ 。函数 fft() 中的  $N$  可以缺省, 缺省时, 将以被变换的序列长度作为默认的  $N$  值;  $DIM$  则用来确定变换的方向, 也可以缺省, 缺省时默认按列作变换。

在使用这个函数时, 需要注意的是,  $N$  一般应该选择为是 2 的幂, 否则 fft 算法的运算速度将下降, 而且应该注意  $N$  不能选取为质数, 否则 fft() 不再使用快速算法。

在离散电压或电流信号时, 假设采样的间隔时间为  $\Delta t$ , 则在一个周期  $T$  (设变量  $tc=T$ ) 内离散的时间小区间数目为  $tc / \Delta t$ , 采样点数为

$$np = tc / \Delta t + 1 \quad (5-2)$$

在作希尔伯特变换时, 设截断的时间点为  $tq$ , 为简化计算, 不妨假设  $tq = m \cdot tc$ ,  $m$  是正整数。则在  $tq$  内共有

$$nq = tq / \Delta t + 1 = m \cdot (np - 1) + 1 \quad (5-3)$$

个采样点。

在用 `yhilbert(xn)` 计算离散的希尔伯特变换时，正半轴的截断时间为  $tq$ ，负半轴截断时间也为  $tq$ 。所以， $xn$  (即电压信号  $u$ ) 和  $hxn$  (即  $\hat{u}$ ) 应该设为  $2*(nq-1)+1$  项数组。由于  $u(t)$  是周期为  $T$  的信号，因此在  $xn$  中，应该每隔  $np-1$  项重复装入  $u(t)$  的样点值。即  $xn(1), \dots, xn(np-1)$  的值与  $xn(np), \dots, xn(2*(np-1))$  的值相同。

但是，我们发现，当  $xn$  的长度选为  $2*(nq-1)+1$  项数组的时候，Hilbert 变换的子程序会发生错误，MATLAB 的命令窗口显示：

“??? Subscript indices must either be real positive integers or logicals.

Error in ==> yhilbert at 22

Zk(k3+1)=zeros(size(k3))”

也就是说， $Zk(k3+1)$  中的参数  $k3+1$  必须为整数。而因为  $N=2*(nq-1)+1$  为奇数，所以， $k3=N/2:N-1$  不满足整数的条件。我们需要对采样过程做如下改进：

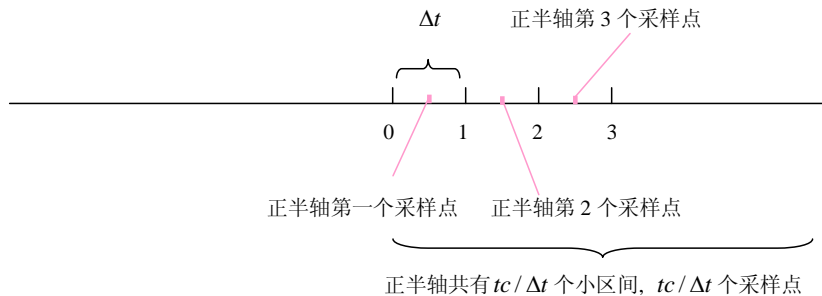


图 5-1 采样间隔的划分和采样点的选取

将采样点取在  $\Delta t$  的中间点上，如图 5-1 所示，一个周期  $tc$  内总共的采样点数为

$$np = tc / \Delta t \tag{5-4}$$

这样，正半轴的采样点数总共为  $nq$  个，而负半轴的采样点数也为  $nq$  个，其中

$$nq = m \cdot np \tag{5-5}$$

因此，在用 `yhilbert(xn)` 计算离散的希尔伯特变换时， $xn$  和  $hxn$  的长度变为为  $2*nq$  项数组，满足偶数的条件，即满足  $k3+1$  取整数的条件。并且在  $xn$  中，每隔  $np$  项重复装入  $u(t)$  的样点值，即  $xn(1), \dots, xn(np)$  的值与  $xn(np+1), \dots, xn(2*np)$  的值相同。

综上所述，由于  $u(t)$  是包含了有限谐波成份的信号，因此理论上必定是一个无限的序列，且它分布在时间轴 0 点的两侧。在作数字计算时，必须对无穷伸展的连续信号截断和抽样，而据前面分析，抽样后数字化的  $u(t)$  序列又应该是 2 的倍数。为了满足这些要求，可以使用以下抽样方法：

- ① 将信号以时间轴的零点为对称作截断；
- ② 将截断的正负半轴部分分别等分成  $n$  份， $n$  是正整数；
- ③ 在每个等分区间的中点抽样，并按下述方式装入数组  $u(n)$  中：
  - a. 正半轴：第 1 个抽样点装入或  $u(nq+1)$ ，第 2 个抽样点装入或  $u(nq+2)$ ，……

b. 负半轴: 第 -1 个抽样点装入或  $u(nq)$ , 第-2 个抽样点装入或  $u(nq-1)$ , ……  
这样, 就可以由子程序 yhilbert(xn)计算出  $u(n)$  的希尔伯特变换  $\hat{u}(n)$ 。

## 5.2 计算单次谐波无功功率的子程序 calq.m

令  $f$  为信号频率,  $\delta$  为采样间隔,  $ix$  为谐波的次数,  $a$  为电压幅度,  $b$  为电流幅度,  $\phi$  为电压初相位,  $\theta$  为电流初相位,  $us$  为用 yhilbert(xn)计算得到的离散电压信号  $u(n)$  的希尔伯特变换  $\hat{u}(n)$  (在 hxn 中截取 1 到  $np$  项装入  $us$  即可);  $is$  为离散的电流信号  $i(n)$ 。则程序如下:

```
%this program is used to compute the reactive power of a single harmonic
function q=calq(an,ix)
format long %双精度数显示小数点后 15 位
global np; %定义全局变量
global nq;
global f;
global delta;
global xun;
global us;
global is;
global tc;
s1=strcat(int2str(ix),'次谐波电压幅度 a=');
a=input(s1)
s2=strcat(int2str(ix),'次谐波电流幅度 b=');
b=input(s2)
s3=strcat(int2str(ix),'次谐波电压初相位 phi=');
phi=input(s3)
s4=strcat(int2str(ix),'次谐波电流初相位 sita=');
sita=input(s4)
xn=zeros(1,2*nq);
for jx=1:2*nq
    xun(an,jx)=a*sin(2*pi*ix*f*jx*delta+phi); %us 的表达式
    xn(jx)=xun(an,jx);
end
hxn=yhilbert(xn); %调用函数 yhilbert(xn)
for jx=1:np
    us(an,jx)=real(hxn(jx)); %把希尔伯特变换后的 hxn 的前 np 项送入 us
    is(an,jx)=b*sin(2*pi*ix*f*jx*delta+sita); %is 的表达式
end
sum=0;
for jx=1:np
    sum=sum+us(an,jx)*is(an,jx)*delta; %离散求和
```

```
end  
q=sum/tc;
```

### 5.3 计算多次谐波无功功率的总程序 dhf.m

利用上面两个子程序，很容易设计一个实验程序，把各次谐波无功功率相加，得到总的无功功率：

```
%this program is used to compute the reactive power of the original signal  
clear  
format long  
global np;  
global nq;  
global f;  
global delta;  
global xun;  
global us;  
global is;  
global tc;  
ix=[1 2 3 4 5]; %ix 为谐波次数，也可取不连续的正整数  
len=length(ix);  
f=input('信号基波频率 f=')  
delta=input('采样间隔 delta=')  
tc=1/f;  
np=round(tc/delta); %对采样次数 np 取整  
m=2; %截断长度在正负半轴各取个 m 周期，m 可取不同值  
nq=m*np;  
xun=zeros(len,2*nq);  
us=zeros(len,np);  
is=zeros(len,np);  
q=0;  
for a=1:len  
    q=q+calq(a,ix(a)); %各次谐波无功功率相加  
end  
q %屏幕上显示无功功率值  
usx=zeros(1,np);  
figure(1);  
n=1:np;  
for ax=1:len  
    for bx=1:np  
        usx(bx)=xun(ax,bx);  
    end  
    plot(n,usx,'b'); %把 us 各次谐波波形画在一张图上
```

```
    hold on;
end
s=axis;
axis([s(1) s(2) s(3)*1.2 s(4)*1.2]);
xlabel('抽样数 n 单位: 无');
ylabel('电压值 u(n) 单位: 伏特');
hold off;
isx=zeros(1,np);
figure(2);
for ax=1:len
    for bx=1:np
        isx(bx)=is(ax,bx);
    end
    plot(n,isx,'r'); %把 is 各次谐波波形画在一张图上
    hold on;
end
s=axis;
axis([s(1) s(2) s(3)*1.2 s(4)*1.2]);
xlabel('抽样数 n 单位: 无');
ylabel('电流值 i(n) 单位: 安培');
hold off;
```

需要说明的是, 在输入采样间隔  $\delta$  时, 一定要满足奈奎斯特抽样定理, 即采样频率  $1/\delta$  一定要大于信号的频率  $f$  的 2 倍, 在一个周期内至少抽样两次。这样, 才能使频谱在重复的过程中不产生失真, 否则计算结果将不正确。



## 6 測量結果分析

### 6.1 驗證算法可以應用於實際計算

首先，設信號只包含一個諧波成份，即

$$\begin{aligned} u(t) &= a \sin(\omega t + \varphi) \\ i(t) &= b \sin(\omega t + \theta) \end{aligned} \quad (6-1)$$

則理論上的信號無功功率為

$$Q = \frac{1}{2} ab \sin(\varphi - \theta) \quad (6-2)$$

為了驗證算法的正確性，我們分別設三組電壓和電流信號，取不同的  $a, b, \varphi, \theta, \omega$  值，利用 dhf.m 和 yhilbert.m、calq.m 計算信號的無功功率後，再與理論值比較：

(1)  $u(t) = \sin(2\pi t)$  和  $i(t) = \sin(2\pi t + 0.2)$

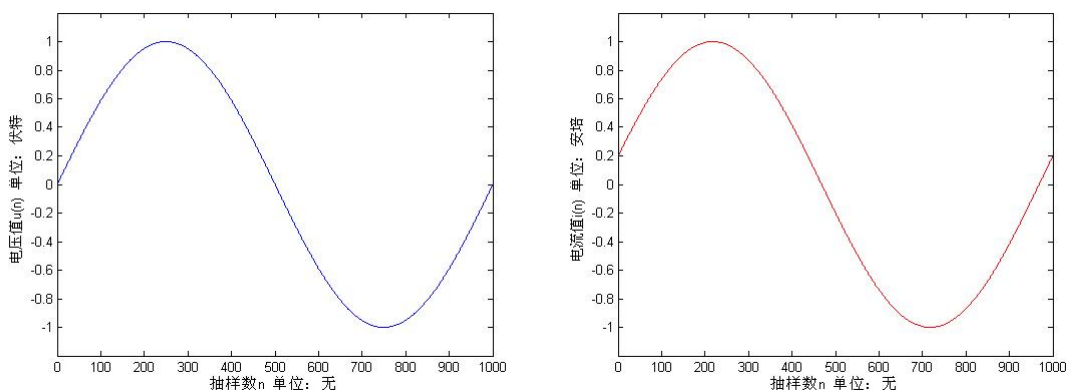


圖 6-1 第一組電壓  $u(t)$  和電流  $i(t)$  的波形

通過運行程序，我們得到無功功率的算法計算值  $Q' = -0.099\ 334\ 665\ 397\ 53$ ，而無功功率的理論值  $Q = 0.5 \times 1 \times 1 \times \sin(0 - 0.2) = -0.099\ 334\ 665\ 397\ 53$ ，二者完全相同。

(2)  $u(t) = 2 \sin(20\pi t + 0.8)$  和  $i(t) = 3 \sin(20\pi t + 0.3)$

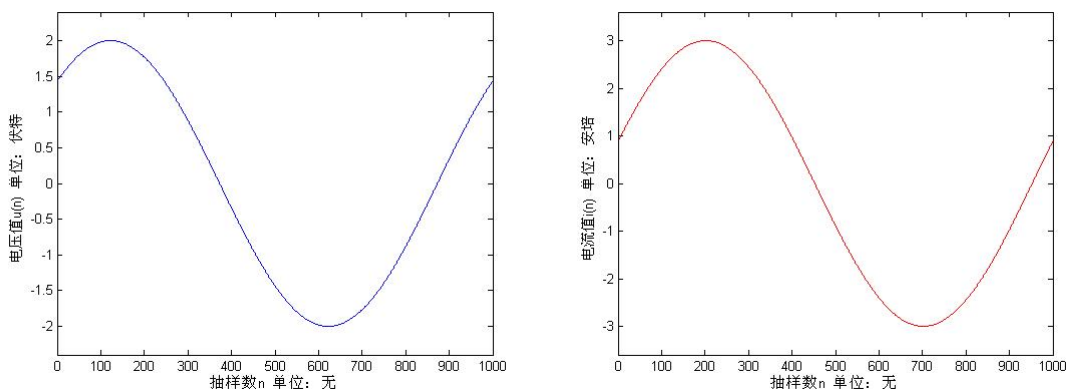


圖 6-2 第二組電壓  $u(t)$  和電流  $i(t)$  的波形

通過運行程序，我們得到無功功率的算法計算值  $Q' = 1.438\ 276\ 615\ 812\ 61$ ，而無功功率的

理论值  $Q = 0.5 \times 2 \times 3 \times \sin(0.8 - 0.3) = 1.438\ 276\ 615\ 812\ 61$ ，二者完全相同。

(3)  $u(t) = 10\sin(100\pi t + 0.2)$  和  $i(t) = 5\sin(100\pi t + 1.0)$

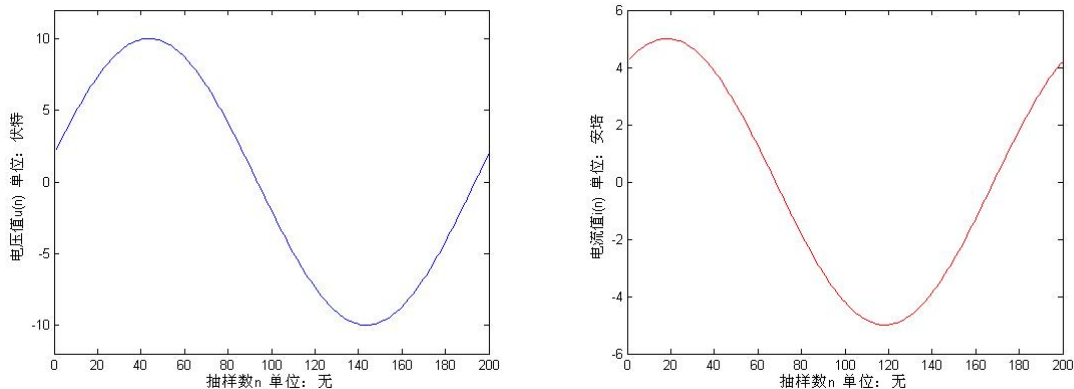


图 6-3 第三组电压  $u(t)$  和电流  $i(t)$  的波形

通过运行程序，我们得到无功功率的算法计算值  $Q' = -17.933\ 902\ 272\ 488\ 07$ ，而无功功率的理论值  $Q = 0.5 \times 10 \times 5 \times \sin(0.2 - 1.0) = -17.933\ 902\ 272\ 488\ 07$ ，二者完全相同。

综上所述，我们可以得到表 6-1：

表 6-1 一次谐波的理论值与算法值比较

	信号 1	信号 2	信号 3
电压幅度 $a$	1	2	10
电流幅度 $b$	1	3	5
电压初相位 $\varphi$	1	0.8	0.2
电流初相位 $\theta$	0.2	0.3	1.0
角频率 $\omega$	$2\pi$	$20\pi$	$100\pi$
理论无功功 $Q$	-0.099 334 665 397 53	1.438 276 615 812 61	-17.933 902 272 488 07
算法计算值 $Q'$	-0.099 334 665 397 53	1.438 276 615 812 61	-17.933 902 272 488 07

然后，设信号包含  $N$  个谐波成份，即

$$u(t) = \sum_{i=1}^N a_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \tag{6-3}$$

$$i(t) = \sum_{i=1}^N b_i \sin(\omega_i t + \theta_i)$$

则理论上的信号无功功率为

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a_i b_i \sin(\varphi_i - \theta_i) \tag{6-4}$$

为了验证算法的正确性，我们分别设三组包含若干个谐波的电压和电流信号，取不同的谐波次数，利用 dhf.m 和 yhilbert.m、calq.m 计算信号的无功功率后，再与理论值比较：

(1)  $u(t) = \sin(2\pi t) + \sin(4\pi t)$  和  $i(t) = \sin(2\pi t + 0.2) + \sin(4\pi t + 0.4)$

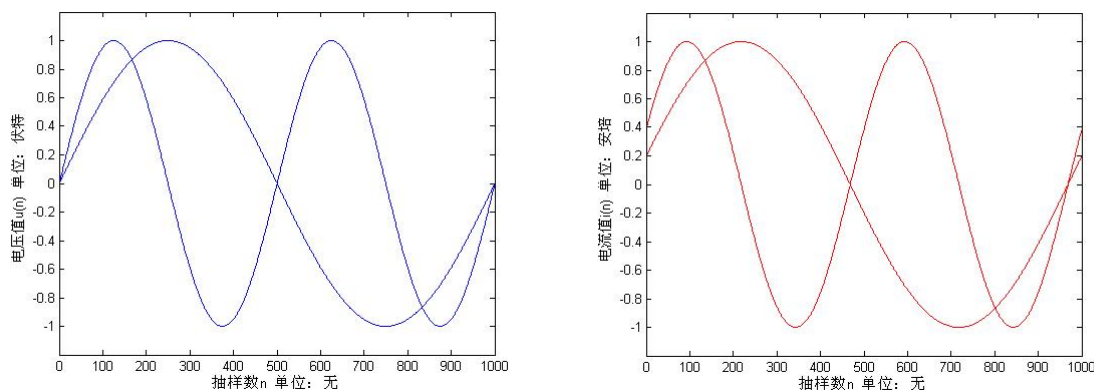


图 6-4 包含二次谐波的电压  $u(t)$  和电流  $i(t)$  的波形

通过运行程序，我们得到无功功率的算法计算值  $Q' = -0.294\ 043\ 836\ 551\ 86$ ，而无功功率的理论值  $Q = 0.5 \times 1 \times 1 \times \sin(0 - 0.2) + 0.5 \times 1 \times 1 \times \sin(0 - 0.4) = -0.294\ 043\ 836\ 551\ 86$ ，二者完全相同。

表 6-2 包含二次谐波的理论值与算法值比较

	1 次谐波	2 次谐波
电压幅度 $a$	1	1
电流幅度 $b$	1	1
电压初相位 $\varphi$	0	0
电流初相位 $\theta$	0.2	0.4
角频率 $\omega$	$2\pi$	$4\pi$
理论无功功 $Q$	-0.294 043 836 551 86	
算法计算值 $Q'$	-0.294 043 836 551 86	

(2)  $u(t) = 4\sin(20\pi t) + 2\sin(40\pi t) + \sin(80\pi t)$  和  $i(t) = 4\sin(20\pi t + 0.8) + 2\sin(40\pi t + 0.4) + \sin(80\pi t + 0.2)$

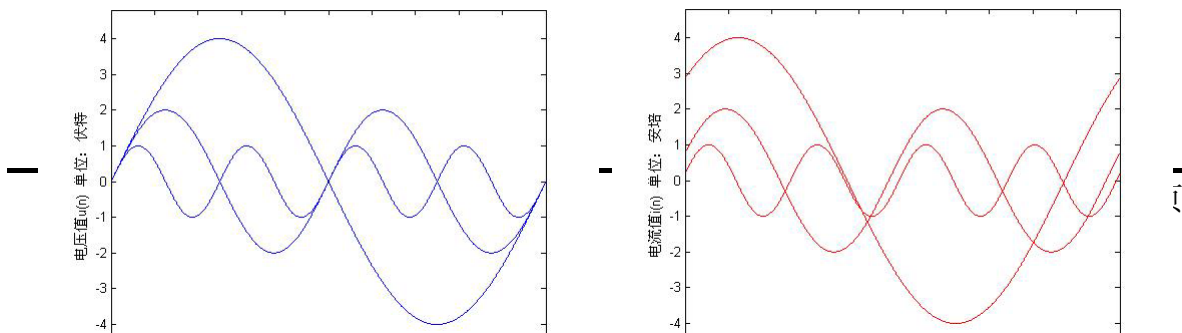


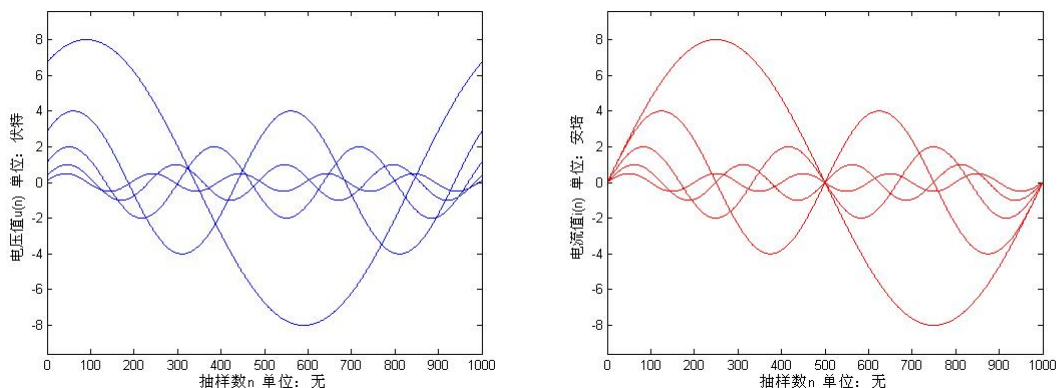
图 6-5 包含三次谐波的电压  $u(t)$  和电流  $i(t)$  的波形

通过运行程序，我们得到无功功率的算法计算值  $Q' = -6.617\ 020\ 077\ 211\ 01$ ，而无功功率的理论值  $Q = 0.5 \times 4 \times 4 \times \sin(0 - 0.8) + 0.5 \times 2 \times 2 \times \sin(0 - 0.4) + 0.5 \times 1 \times 1 \times \sin(0 - 0.2) = -6.617\ 020\ 077\ 211\ 01$ ，二者完全相同。

表 6-3 包含三次谐波的理论值与算法值比较

	1 次谐波	2 次谐波	4 次谐波
电压幅度 $a$	4	2	1
电流幅度 $b$	4	2	1
电压初相位 $\varphi$	0	0	0
电流初相位 $\theta$	0.8	0.4	0.2
角频率 $\omega$	$20\pi$	$40\pi$	$80\pi$
理论无功功 $Q$	-6.617 020 077 211 01		
算法计算值 $Q'$	-6.617 020 077 211 01		

(3)  $u(t) = 8\sin(20\pi t + 1.0) + 4\sin(40\pi t + 0.8) + 2\sin(60\pi t + 0.6) + \sin(80\pi t + 0.4) + 0.5\sin(100\pi t + 0.2)$  和  $i(t) = 8\sin(20\pi t) + 4\sin(40\pi t) + 2\sin(60\pi t) + \sin(80\pi t) + 0.5\sin(100\pi t)$



通过运行程序，我们得到无功功率的算法计算值  $Q' = 34.014\ 748\ 025\ 342\ 65$ ，而无功功率的理论值  $Q = 0.5 \times 8 \times 8 \times \sin(1.0 - 0) + 0.5 \times 4 \times 4 \times \sin(0.8 - 0) + 0.5 \times 2 \times 2 \times \sin(0.6 - 0) + 0.5 \times 1 \times 1 \times \sin(0.4 - 0) + 0.5 \times 0.5 \times 0.5 \times \sin(0.2 - 0) = 34.014\ 748\ 025\ 342\ 65$ ，二者几乎完全相同。

表 6-4 包含五次谐波的理论值与算法值比较

	1 次谐波	2 次谐波	3 次谐波	4 次谐波	5 次谐波
电压幅度 $a$	8	4	2	1	0.5
电流幅度 $b$	8	4	2	1	0.5
电压初相位 $\varphi$	1.0	0.8	0.6	0.4	0.2
电流初相位 $\theta$	0	0	0	0	0
角频率 $\omega$	$20\pi$	$40\pi$	$60\pi$	$80\pi$	$100\pi$
理论无功功率 $Q$	34.014 748 025 342 61				
算法计算值 $Q'$	34.014 748 025 342 65				

由此可见，无论是一次谐波还是多次谐波的情况下，无功功率的算法计算值  $Q'$  与无功功率的理论值  $Q$  几乎完全相同。所以，该实验程序可以应用于实际的无功功率测量中。

## 6.2 精度分析

下面，我们分析希尔伯特变换时的截断长度对计算结果的影响。由于第 5 章中的子程序 `yhilbert.m` 和 MATLAB 自带的希尔伯特变换函数 `hilbert(x)` 都是利用 FFT 算法来实现的，所以 `m` 取不同的值不会对计算结果产生影响。于是我们要把第 5 章程序中的 `yhilbert.m` 子程序用卷积函数 `conv(x,y)` 替换。

以一次谐波  $u(t) = \sin(2\pi t + 0.2)$  和  $i(t) = \sin(2\pi t)$  为例，程序如下：

```
%this program is used to analyze the section process
format long;
f=1;
tc=1/f;
delta=0.001;
a=1;
b=1;
phi=0.2;
sita=0;
np=tc/delta;
m=16;
nq=m*np;
q=0;
n1=1:2*nq;
xn=zeros(1,2*nq);
xt=zeros(1,2*nq);
xn((nq+1):2*nq)=a*sin(2*pi*f*(n1(1:nq)-0.5)*delta+phi);
xn(1:nq)=a*sin(2*pi*f*(n1(1:nq)-nq-0.5)*delta+phi);
```

```

xt((nq+1):2*nq)=1./(pi*(n1(1:nq)-0.5)*delta);
xt(1:nq)=1./(pi*(n1(1:nq)-nq-0.5)*delta);
us=conv(xn,xt)*delta;
n2=1:np;
is=b*sin(2*pi*f*n2*delta+sita);
for j=1:np
    q=q+us(j+2*nq)*is(j)*delta;
end
q=q/tc

```

通过运行程序，分别代入  $m=1,2,4,8,16$ ，得到无功功率的算法计算值  $Q'$ ，而无功功率的理论值  $Q = 0.5 \times 1 \times 1 \times \sin(0.2 - 0) = 0.099\ 334\ 665\ 397\ 53$ 。分别将  $Q'$  与  $Q$  作比较，得到  $m$  取不同值时的截断误差。

表 6-5 截断长度引起的误差分析

截断长度 $m$	理论值 $Q$	计算值 $Q'$	截断误差
1	0.099 334 665 397 53	0.054 475 932 352 17	45.159%
2	0.099 334 665 397 53	0.092 299 740 980 86	7.082%
4	0.099 334 665 397 53	0.097 181 631 772 44	2.167%
8	0.099 334 665 397 53	0.098 502 969 783 80	0.837%
16	0.099 334 665 397 53	0.098 971 759 390 03	0.365%

从表 6-5 中可以看出，当  $m=1$  时，截断误差很大；当  $m=8$  时，截断误差小于百分之一，可以用于近似的计算。

## 7 结论与展望

通过分析非正弦信号的无功功率，阐述了现实生活中广泛存在的周期非正弦信号的功率的计算方法，推导出了功率的计算表达式和 MATLAB 算法，当中用到了电工原理、信号系统以及数字信号处理等课程的诸多理论。对于 MATLAB 编程，可以用来计算含有有限次谐波的周期非正弦信号的无功功率。实验结果及数据分析表明，该程序可以在实际工程中应用，并且具有很高的精度。

对信号功率的研究，已有很多年的历史，在理论和应用方面取得了很大的成就。随着研究的不断深入和与各相关学科的交叉与融合，它必将在理论上日臻完善，在应用上日趋广泛。

## 谢 辞

首先，衷心感谢周治邦老师在设计过程中的帮助和指导。在一个学期的毕业设计制作期间，通过进行多次深入的讨论，使我获得了大量关键性的指导和宝贵的富有启发性的建议。

在同济大学的学习期间，四年来我的各位科任老师（孙懋珩教授，刘富强教授，程纪文老师，陆杰老师，戴明远老师，陈耀老师，陈康力老师，罗胜钦老师等）以其丰富的知识，扎实深厚的学术造诣，严谨求实的治学态度和勤奋忘我的工作精神，悉心指导我的学习，使我在电子信息工程专业学习和科研的道路上从不知到知，一天一天地不断进步，终生受益。在此表示由衷的感谢！



## 参考文献

- [1] 郑君里等. 信号与系统. 第2版. 北京: 高等教育出版社, 2000, 88~160
- [2] 段凤增. 信号检测理论. 第2版. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2002, 1~13
- [3] 程佩青. 数字信号处理. 第2版. 北京: 清华大学出版社, 2001, 87~200
- [4] 胡广书. 数字信号处理-理论算法与实现. 第2版. 北京: 清华大学出版社, 2003, 93~216
- [5] 邹鲲等. MATLAB6.0 信号处理. 北京: 清华大学出版社, 2002, 128~131
- [6] Openheim A.V. Schafer R.W. Discrete-Time Signal Processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, Inc., 1989
- [7] V.K.Ingle, J.G.Proakis. Digital Signal Processing Using MATLAB. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 2000
- [8] 何振亚. 数字信号处理的理论与应用. 北京: 人民邮电出版社, 1983
- [9] 柳重堪. 信号处理的数学方法. 南京: 东南大学出版社, 1992
- [10] 陈怀琛. MATLAB 及其在电子信息课程中的应用. 北京: 电子工业出版社, 2002, 3~91